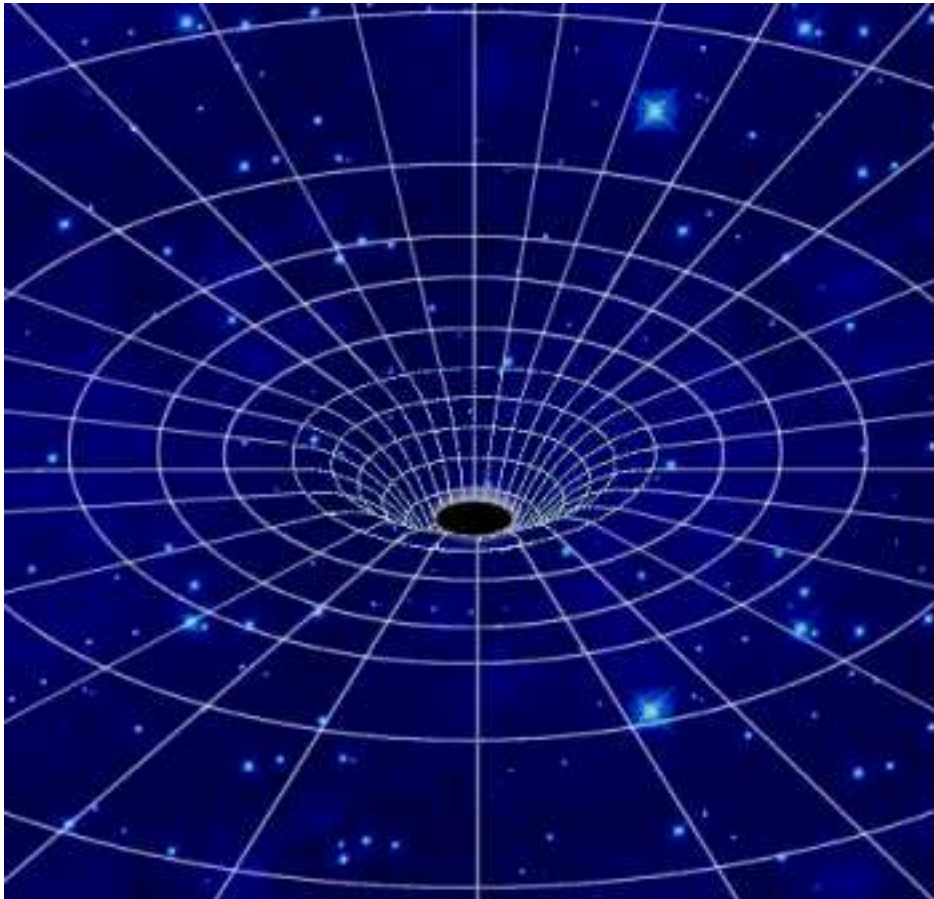


# Sbírka úloh z RFA I

Jan Schee

November 7, 2013



# 1 Vektory a tenzory, metrický tenzor, afinní konexe

**Příklad č.1** Kontravariantní komponenty vektoru  $\vec{A}$  v souřadnicích  $x^i$  jsou

$$\vec{A} = (A^1, A^2) = \left(2x^2, \frac{1}{2}x^1\right). \quad (1)$$

Určete komponenty vektoru  $\vec{A}$  vůči souřadnicím  $x^{i'}$ , které jsou ve vztahu s  $x^i$  transformačními relacemi

$$x^{1'} = x^1 \sin x^2, \quad (2)$$

$$x^{2'} = x^1 \cos x^2. \quad (3)$$

**Řešení:** Transformační matice má tvar

$$\left[ \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} \right] = \left[ \begin{array}{cc} \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1} & \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2} \\ \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^1} & \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^2} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc} \sin x^2 & x^1 \cos x^2 \\ \cos x^2 & -x^1 \sin x^2 \end{array} \right]. \quad (4)$$

Složky  $A^1$  a  $A^{i'}$  vektoru  $\vec{A}$  jsou ve vzájemném vztahu podle vzorce

$$A^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} A^j \quad (5)$$

odkud dostaneme, že je

$$A^{1'} = \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1} A^1 + \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2} A^2 = \quad (6)$$

a podobně

$$A^{2'} = \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^1} A^1 + \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^2} A^2 = \quad (7)$$

**Příklad č.2** Nechť je dána transformace  $x \rightarrow x'$  ve tvaru

$$x^{1'} = x^1 - x^2, \quad (8)$$

$$x^{2'} = x^1 + x^2. \quad (9)$$

Dále nechť jsou

$$T^{11} = 1, T^{12} = T^{21} = 0 \quad \text{a} \quad T^{22} = \rho_0, \quad (10)$$

kontravariantní složky tenzoru  $\mathbf{T}$  vůči souřadnicím  $x$ . Jaké budou kontravariantní složky tohoto tenzoru vůči souřadnicím  $x'$  ?

**Řešení:** V tomto případě má matice transformace tvar

$$\left[ \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} \right] = \left[ \begin{array}{cc} \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1} & \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2} \\ \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^1} & \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^2} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{array} \right]. \quad (11)$$

Kontravariantní složky tenzoru  $T$  se transformují podle vzorce

$$T^{i'j'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j} T^{ij} \quad (12)$$

Dostáváme tak výsledek

$$T^{1'1'} = T^{11} + T^{22} = 1 + \rho_0, \quad (13)$$

$$T^{1'2'} = T^{11} - T^{22} = 1 - \rho_0, \quad (14)$$

$$T^{2'1'} = T^{11} - T^{22} = 1 - \rho_0, \quad (15)$$

$$T^{2'2'} = T^{11} + T^{22} = 1 + \rho_0. \quad (16)$$

**Příklad č.3** Mějme opět transformaci  $x' \rightarrow x$ , tentokrát posanou soustavou rovnic

$$x^{1'} = 2x^1 + 3x^2 - x^3, \quad (17)$$

$$x^{2'} = -x^1 - 2x^2 + x^3, \quad (18)$$

$$x^{3'} = x^1. \quad (19)$$

Najděte matici této transformace a matici příslušné inverzní transformace.

**Řešení:** Matice transformace je zřejmě následující

$$\left[ \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} \right] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

Gaussovou eliminační metodou určíme z matice transformace matici inverzní transformace, která má nakonec tvar

$$\left[ \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}. \quad (21)$$

**Příklad č.4** Transformační vztahy mezi Boyer-Lindquistovými souřadnicemi a "Kerr ingoing" souřadnicemi jsou

$$\mathbf{e}_{t'} = \mathbf{e}_t, \quad (22)$$

$$\mathbf{e}_{u'} = -r^2 \mathbf{e}_r + r^2 \frac{r^2 + a^2}{\Delta} (\mathbf{e}_t + \Omega \mathbf{e}_\varphi), \quad (23)$$

$$\mathbf{e}_{m'} = -\frac{1}{\sin \theta} \mathbf{e}_\theta, \quad (24)$$

$$\mathbf{e}_{\varphi'} = \mathbf{e}_\varphi. \quad (25)$$

Najděte matici příslušné inverzní transformace.

**Řešení:** Srovnáním obecného transformačního vztahu mezi bázovými vektory

$$\mathbf{e}_{i'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \mathbf{e}_i \quad (26)$$

s transformací 22-25 obdržíme transformační matici

$$\left[ \frac{\partial x^a}{\partial x^{b'}} \right] = \begin{bmatrix} 1 & \frac{r^2(r^2+a^2)}{\Delta} & 0 & 0 \\ 0 & -r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sin^2 \theta} & 0 \\ 0 & \frac{r^2(r^2+a^2)}{\Delta} \Omega & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (27)$$

Gaussovou eliminační metodou obdržíme z výše uvedené transformační matice matici příslušné inverzní transformace

$$\left[ \frac{\partial x^{b'}}{\partial x^a} \right] = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1+a^2 u'^2}{\Delta'} & 0 & 0 \\ 0 & -u'^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{1-m'^2} & 0 \\ 0 & \frac{a u'^2}{\Delta'} & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (28)$$

**Příklad č.5** Symetrizujte a antisymetrizujte tenzor  $[T_{ab}]$ , který má složky

$$T_{11} = 1, \quad T_{12} = \rho, \quad T_{21} = -2\rho \quad \text{a} \quad T_{22} = p. \quad (29)$$

**Řešení:** Proces symetrizace je dán vztahem

$$T_{(ab)} = \frac{1}{2} (T_{ab} + T_{ba}). \quad (30)$$

Odtud dostáváme výsledek

$$T_{(11)} = 1, \quad T_{(12)} = T_{(21)} = -\frac{1}{2}\rho \quad \text{a} \quad T_{(22)} = p. \quad (31)$$

Při antisymetrizaci postupujeme podle vztahu

$$T_{[ab]} = \frac{1}{2} (T_{ab} - T_{ba}). \quad (32)$$

Přímým použitím tohoto vztahu ihned obdržíme výsledek

$$T_{[11]} = 0, \quad T_{[12]} = -T_{[21]} = \frac{3}{2}\rho \quad \text{a} \quad T_{[22]} = 0. \quad (33)$$

## 2 Pohyb testovacích částic

**Příklad č.1** Metrika na 2-sféře je popsána délkovým elementem

$$dl^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (34)$$

V bodě  $P = (\theta_0, \phi_0)$  je vektor, který má v příslušném tečném prostoru, vůči souřadnicové bazi, kontravariantní složky  $V = (V^\theta, V^\phi) = (2\phi_0, -\theta_0)$ . Určete kovariantní složky tohoto vektoru  $V_i$ .

**Řešení:** Vztah mezi kovariantními a kontravariantními složkami je

$$V_i = g_{ij} V^j, \quad (35)$$

kde složky metrického tenzoru  $g_{ij}$  jsou

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (36)$$

Výsledek potom je

$$V_\theta = g_{\theta j} V^j = g_{\theta\theta} V^\theta + g_{\theta\phi} V^\phi = 2\phi_0 \quad (37)$$

a

$$V_\phi = g_{\phi j} V^j = g_{\phi\theta} V^\theta + g_{\phi\phi} V^\phi = -\theta_0 \sin^2 \theta_0. \quad (38)$$

**Příklad č.2** Dokažte, že

1. 2-D metrický prostor popsaný metrikou

$$ds^2 = dv^2 - v^2 du^2 \quad (39)$$

je plochý 2-D Minkowského prostoročas, popsaný prostoročasným intervalem

$$ds^2 = dx^2 - dt^2. \quad (40)$$

2. pro neurychlenou částici je kovariantní složka 4-hybnosti  $p_u$  konstantní ale  $P_v$  konstantní není.

**Řešení:**

1. Snadno zjistíme, že transformace  $(u, v) \rightarrow (x, t)$  ve tvaru

$$x = v \sinh u, \quad (41)$$

$$t = v \cosh u \quad (42)$$

převádí (39) na (40). Tyto transformační vztahy lze odvodit následovně. Rozepišme nejprve obecné diferenciály  $dx$  a  $dt$  a dostaneme

$$dx = \frac{\partial x}{\partial v} dv + \frac{\partial x}{\partial u} du, \quad (43)$$

$$dt = \frac{\partial t}{\partial v} dv + \frac{\partial t}{\partial u} du. \quad (44)$$

Umocněním těchto vztahů získáme tyto výrazy

$$dx^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 dv^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 du^2 + 2\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} dudv \quad (45)$$

$$dt^2 = \left(\frac{\partial t}{\partial v}\right)^2 dv^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial u}\right)^2 du^2 + 2\frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial t}{\partial v} dudv \quad (46)$$

a jejich dosazením do rovnice (40) obdržíme pro prostoročasný interval  $ds$ , po úpravách, vztah

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left[ -\left(\frac{\partial t}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 \right] dv^2 \\ &+ \left[ -\left(\frac{\partial t}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 \right] du^2 \\ &+ 2 \left( \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial t}{\partial v} \frac{\partial t}{\partial u} \right) dudv. \end{aligned} \quad (47)$$

Jeho srovnáním se vztahem (39) obdržíme následující tři parciální diferenciální rovnice

$$-\left(\frac{\partial t}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 = 1 \quad (48)$$

$$-\left(\frac{\partial t}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 = -v^2 \quad (49)$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial t}{\partial v} \frac{\partial t}{\partial u} = 0. \quad (50)$$

Z rovnice (48) vidíme, že ji lze splnit pro

$$\frac{\partial t}{\partial v} = \sinh u, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \cosh u, \quad (51)$$

protože platí  $\cosh^2 a - \sinh^2 a = 1$ . Získáváme tak transformační vztahy (41) a (42). Vhodnost této volby ověříme dosazením do rovnic (49) a (50). Když pro nalezené transformační vztahy určíme příslušné diferenciály  $dx$  a  $dt$

$$dx = dv \sinh u + v \cosh u du, \quad (52)$$

$$dt = dv \cosh u + v \sinh u du \quad (53)$$

pak dosazením do (40) musíme obdržet výsledek

$$ds^2 = dx^2 - dt^2 = \dots = dv^2 - v^2 du^2. \quad (54)$$

2. Hamiltonián, který vede na rovnice geodetiky má tvar

$$H = \frac{1}{2} g^{ab} p_a p_b = \frac{1}{2} (p_v)^2 - \frac{1}{2} v^2 (p_u)^2. \quad (55)$$

Z Hamiltonových rovnic pak obdržíme

$$\frac{dp_u}{d\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \Rightarrow p_u = konst, \quad (56)$$

$$\frac{dp_v}{d\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial v} = v^{-3} (p_u)^2 \Rightarrow p_v \neq konst. \quad (57)$$

**Příklad č.3** Dokažte, že konformní transformace metriky, tj.  $g_{ab} \rightarrow f(x^c)g_{ab}$  pro libovolnou funkci  $f$  zachovává úhly. Ukažte, že všechny nulové křivky zůstanou nulovými křivkami.

**Řešení:** Lokální úhel  $\alpha$ , kerý svírají dva vektory  $A, B$  v daném bodě popisuje rovnice

$$\cos \alpha = \frac{A \cdot B}{|A||B|} = \frac{g_{ab} A^a B^b}{\sqrt{g_{ab} A^a A^b} \sqrt{g_{ab} B^a B^b}}. \quad (58)$$

Spočítejme velikost úhlu  $\alpha'$ , který svírají úhly  $A, B$  vůči metrice  $f g_{ab}$  a obdržíme

$$\cos \alpha' = \frac{f g_{ab} A^a B^b}{\sqrt{f g_{ab} A^a A^b} \sqrt{f g_{ab} B^a B^b}} = \frac{f}{f} \frac{g_{ab} A^a B^b}{\sqrt{g_{ab} A^a A^b} \sqrt{g_{ab} B^a B^b}} = \cos \alpha. \quad (59)$$

Dále, nechť je  $k$  nulový vektor, tj., platí

$$g_{ab}k^ak^b = 0 \quad \Rightarrow \quad fg_{ab}k^ak^b = 0. \quad (60)$$

Takže nulové vektory zůstávají, při konformní transformaci, nulovými vektory.

**Příklad č.4** Určete velikost 4-rychlosti a 4-hybnosti, jejichž kontravariantní složky jsou definovány vektory

$$U^i = \frac{dx^i}{d\tau} \quad \text{a} \quad P^i = mU^i \quad (61)$$

kde je  $m$  je klidová hmotnost částice.

**Řešení:** Čtverec velikosti vektoru  $\mathbf{U} = U^i \mathbf{e}_i$  v metrickém prostoru je

$$U^2 = \mathbf{U} \cdot \mathbf{U} = g_{ij}U^iU^j = g_{ij}\frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx^j}{d\tau}. \quad (62)$$

Současně ale platí

$$ds^2 = g_{ij}dx^idx^j \quad \Rightarrow \quad \frac{ds^2}{d\tau^2} = g_{ij}\frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx^j}{d\tau}. \quad (63)$$

Vztah mezi prostoročasovým intervalem,  $ds$ , a vlastním časem,  $d\tau$ , je

$$ds^2 = -d\tau^2. \quad (64)$$

Tyto rovnice implikují výsledek

$$-1 = g_{ij}U^iU^j \quad \text{a} \quad -m^2 = g_{ij}P^iP^j. \quad (65)$$

**Příklad č.5** Určete transformační vztah geometrického objektu se složkami  $\partial V^i/\partial x^j$ .

**Řešení:** Nechť je dána transformace  $x' \rightarrow x$ . Počítejme

$$\begin{aligned} \frac{\partial V^{i'}}{\partial x^{j'}} &= \frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}} \frac{\partial V^{i'}}{\partial x^i} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} V^j \right) \\ &= \frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}} \left( \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} \frac{\partial V^j}{\partial x^i} + V^j \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^i \partial x^j} \right) \\ &= \frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} \frac{\partial V^j}{\partial x^i} + \frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}} \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^i \partial x^j} V^j \end{aligned} \quad (66)$$

První člen výsledného transformačního vztahu se transformuje jako tenzor typu (1,1) ale nenulový druhý člen způsobí, že parciální derivace složek vektoru netvoří tenzor.

**Příklad č.6** Z definice kovariantní derivace určete transformační vlastnosti afinní konexe  $\Gamma$ .

**Řešení:** Kovariantní derivace kontravariantních složek vektoru  $\mathbf{V}$  je

$$\nabla_i V^j = \partial_i V^j + \Gamma^j_{ki} V^k. \quad (67)$$

Uvažujme transformaci  $x' \rightarrow x$  a máme

$$\begin{aligned}\nabla_{i'} V^{j'} &= \partial_{i'} V^{j'} + \Gamma_{k'i'}^{j'} V^{k'} \\ &= \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial V^j}{\partial x^j} + \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial^2 x^{j'}}{\partial x^i \partial x^j} V^j + \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} \Gamma_{k'i'}^{j'} V^{k'} \\ &= \text{[z def. (67)]} = \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \left( \frac{\partial V^j}{\partial x^i} + \Gamma_{ki}^j V^k \right)\end{aligned}\quad (68)$$

Odtud dostáváme rovnici

$$\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \Gamma_{ki}^j V^k = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial^2 x^{j'}}{\partial x^i \partial x^j} V^j + \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} \Gamma_{k'i'}^{j'} V^{k'} \quad (69)$$

kteřá po několika algebraických úpravách vyústí ve výsledek

$$\Gamma_{k'i'}^{j'} = \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \Gamma_{ki}^j - \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial^2 x^{j'}}{\partial x^i \partial x^k}. \quad (70)$$

**Příklad č.7** Určete, jak se transformují složky afinní konexe.

**Řešení:** Volně padající systém vybavíme souřadnicemi  $\xi^\alpha$ . Volná částice bude v tomto systému podléhat pohybovým rovnicím

$$\frac{d^2 \xi^\alpha}{d\tau^2} = 0. \quad (71)$$

Při pozorování ze systému na povrchu hvězdy (například), který vybavíme souřadnicemi  $x^\alpha$ , budou pohybové rovnice této částice následující. Souřadnice  $\xi^\alpha$  jsou funkcemi souřadnic  $x^\alpha$ , z rovnice (71) tak dostáváme

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau} \left( \frac{d\xi^\alpha}{d\tau} \right) &= \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \right) \\ &= \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\nu \partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0\end{aligned}\quad (72)$$

Tuto rovnici vynásobíme členem  $\partial x^\sigma / \partial \xi^\alpha$  a dostaneme

$$\frac{d^2 x^\sigma}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}, \quad (73)$$

kde jsme zavedli

$$\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \frac{\partial x^\sigma}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}. \quad (74)$$

Uvažujme transformaci  $x'^\mu = x'^\mu(x^\nu)$  a z rovnice (74) určíme jak se transformuje afinní konexe.

Nejprve určíme následující transformační vztahy

$$\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial \xi^i} = \frac{\partial x^{\mu'}(x^\sigma(\xi^j))}{\partial \xi^i} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x^\sigma}{\partial \xi^i} \quad (75)$$

a

$$\frac{\partial \xi^i}{\partial x^{\beta'}} = \frac{\partial \xi^i(x^\alpha(x^{\alpha'}))}{\partial x^{\beta'}} = \frac{\partial \xi^i}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}}. \quad (76)$$



S využitím těchto vztahů počítejme.

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\alpha'}_{\beta'\gamma'} &= \frac{\partial x^{\alpha'}}{\xi^\sigma} \frac{\partial^2 \xi^\sigma}{\partial x^{\beta'} \partial x^{\gamma'}} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi^\sigma} \frac{\partial}{\partial x^{\beta'}} \left( \frac{\partial x^\gamma}{\partial x^{\gamma'}} \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\gamma} \right) \\
&= \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi^\sigma} \left( \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\gamma} \frac{\partial^2 x^\gamma}{\partial x^{\gamma'} \partial x^{\beta'}} + \frac{\partial x^\gamma}{\partial x^{\gamma'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial^2 \xi^\sigma}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} \right) \\
&= \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x^{\gamma'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} + \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^{\beta'} \partial x^{\gamma'}}. \tag{77}
\end{aligned}$$

Odtud plyne, že afinní konexe se netransformuje jako tenzor !

**Příklad č.8** Ukažte, že výraz

$$A_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} \tag{78}$$

se transformuje jako tenzor.

**Řešení:** Parciální derivace kovariantních složek 4-vektoru se transformuje takto

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A_{\alpha'}}{\partial x^{\beta'}} &= \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial A_{\alpha'}}{\partial x^\beta} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left( \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} A_\alpha \right) \\
&= \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta} + \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^{\alpha'} \partial x^{\beta'}} A_\alpha. \tag{79}
\end{aligned}$$

Teď stačí tento vztah dosadit do rovnice (78) a dostáváme

$$\begin{aligned}
A_{\alpha'\beta'} &= \frac{\partial A_{\alpha'}}{\partial x^{\beta'}} - \frac{\partial A_{\beta'}}{\partial x^{\alpha'}} \\
&= \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta} + \frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial x^{\alpha'} \partial x^{\beta'}} A_\sigma \\
&\quad - \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial x^{\beta'} \partial x^{\alpha'}} A_\sigma \\
&= \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} \left( \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta} - \frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha} \right) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} A_{\alpha\beta}. \tag{80}
\end{aligned}$$

Objekt, definovaný výrazem (78) se transformuje jako tenzor !

**Příklad č.9** Určete koeficienty afinní konexe v případě metriky na 2-sféře, která je zadaná délkovým elementem ve tvaru

$$dl^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2. \tag{81}$$

**Řešení:** Složky afinní konexe počítáme ze vztahu

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{is} (-g_{jk,s} + g_{sj,k} + g_{ks,j}) \tag{82}$$

a dostáváme následující nenulové složky

$$\Gamma^\theta_{\phi\phi} = -\cos \theta \sin \theta, \quad \Gamma^\phi_{\theta\phi} = \Gamma^\phi_{\phi\theta} = \cot \theta. \tag{83}$$

**Příklad č.10** Ukažte, že volba Hamiltoniánu volné testovací částice ve tvaru

$$H = \frac{1}{2}g^{ij}p_i p_j \quad (84)$$

vede na rovnice geodetiky.

**Řešení:** Rovnice geodetiky odvodíme z Hamiltonových rovnic

$$\frac{dp_k}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial x^k}, \quad \frac{dx^k}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial p_k} \quad (85)$$

Dosazením za Hamiltonián  $H$  dostáváme

$$\frac{dp_k}{d\tau} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g^{ij}}{\partial x^k}p_i p_j, \quad (86)$$

současně ale platí

$$\frac{dp_k}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}(g_{ks}p^s) = \frac{dp^s}{d\tau}g_{ks} + p^s\frac{\partial g_{ks}}{\partial x^i}p^i \quad (87)$$

Zde jsme využili druhé Hamiltonovy rovnice, podle kterých, pro náš Hamiltonián, platí

$$\frac{dx^k}{d\tau} = \frac{1}{2}g^{ij}\frac{\partial p_i}{\partial p_k}p_j + \frac{1}{2}g^{ij}p_i\frac{\partial p_j}{\partial p_k} = g^{kj}p_j = p^k. \quad (88)$$

Spojením rovnic (86) a (87) dostaneme

$$\begin{aligned} g_{ks}\frac{dp^2}{d\tau} &= -\frac{1}{2}\frac{\partial g^{ij}}{\partial x^k}p_i p_j - \frac{\partial g_{ks}}{\partial x^i}p^i p^s \\ &= \frac{1}{2}g^{il}g^{sj}\frac{\partial g_{ls}}{\partial x^k}p_i p_j - \frac{\partial g_{ks}}{\partial x^i}p^i p^s. \end{aligned} \quad (89)$$

V tomto kroku bylo nutné si uvědomit platnost následující identity

$$\frac{\partial}{\partial x^k}(g^{ij}g_{js}) = \frac{\partial \delta_s^i}{\partial x^k} = 0 \Rightarrow \frac{\partial g^{il}}{\partial x^k} = -g^{ij}g^{sl}\frac{\partial g_{js}}{\partial x^k}. \quad (90)$$

Rovnice (89) dále vede k následujícím výpočtům

$$\begin{aligned} g_{ks}\frac{dp^s}{d\tau} &= \frac{1}{2}g_{ls,k}p^l p^s - \frac{1}{2}g_{ks,i}p^i p^s - \frac{1}{2}g_{ks,i}p^i p^s \\ &= |i \longleftrightarrow l| = \frac{1}{2}g_{ls,k}p^l p^s - \frac{1}{2}g_{ks,l}p^l p^s - \frac{1}{2}g_{ks,l}p^l p^s \\ &= |\text{ve 3. členu } l \longleftrightarrow s| = \frac{1}{2}g_{ls,k}p^l p^s - \frac{1}{2}g_{ks,l}p^l p^s - \frac{1}{2}g_{kl,s}p^s p^l \\ &= \frac{1}{2}(g_{ls,k} - g_{ks,l} - g_{kl,s})p^l p^s \end{aligned} \quad (91)$$

Nakonec zřejmě dostáváme rovnici

$$\frac{dp^i}{d\tau} + \frac{1}{2}(-g_{ls,k} + g_{ks,l} + g_{kl,s}) = 0 \rightarrow \frac{dp^i}{d\tau} + \Gamma^i_{ls}p^l p^s = 0. \quad (92)$$

**Příklad č.11** Určete rovnice geodetiky testovací částice na 2-sféře. Délkový element má tvar

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (93)$$

**Řešení:** Využijeme výsledku předchozího cvičení a najdeme pohybové rovnice z Hamiltonových rovnic. Hamiltonián volné testovací částice na 2-sféře je

$$H = \frac{1}{2} g^{ij} p_i p_j = \frac{1}{2} (p_\theta)^2 + \frac{1}{2 \sin^2 \theta} (p_\phi)^2. \quad (94)$$

Z Hamiltonových rovnic dostáváme

$$\frac{dp_\theta}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{\cot \theta}{\sin^2 \theta} (p_\phi)^2 = \cot \theta \sin^2 \theta (p^\phi)^2. \quad (95)$$

Současně, zřejmě, platí  $p_\theta = p^\theta$  a tedy dostávám rovnici geodetiky pro  $\theta$ -komponentu hybnosti ve tvaru

$$\boxed{\frac{dp^\theta}{d\tau} = \cot \theta \sin^2 \theta (p^\phi)^2.} \quad (96)$$

Pro  $\phi$ -komponentu hybnosti obdržíme

$$\frac{dp_\phi}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = 0 \Rightarrow p_\phi = \text{konst} = K = \sin^2 \theta p^\phi. \quad (97)$$

Výsledná rovnice potom je

$$\boxed{p^\phi = \frac{1}{\sin^2 \theta} K.} \quad (98)$$

**Příklad č.12** Vakuové, statické, sféricky symetrické řešení Einsteinových rovnic reprezentuje Schwarzschildova metrika, která má ve Schwarzschildových souřadnicích tvar

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (99)$$

Určete integrály pohybu a v Newtonovské limitě určete jejich fyzikální význam.

**Řešení:** Hamiltonián volné testovací částice v metrickém poli  $g_{\mu\nu}$  je

$$H = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu. \quad (100)$$

Z Hamiltonových rovnic

$$\frac{dp_\alpha}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial x^\alpha} \quad (101)$$

pro  $p_t$  a  $p_\phi$  plyne

$$\frac{dp_t}{d\tau} = 0 \text{ a } \frac{dp_\phi}{d\tau} = 0, \quad (102)$$

protože Hamiltonián  $H$  nezávisí explicitně na souřadnicích  $t$  a  $\phi$ . Takto jsme našli dva integrály pohybu

$$p_t = K_1 \text{ a } p_\phi = K_2. \quad (103)$$

V limitě  $r \gg 1$  přechází Schwarzschildův prostoročas v Minkowského prostoročas. Zde je interpretace složek 4-hybnosti následující.

$$p^\alpha = m \frac{dx^\alpha}{d\tau} = m\gamma \frac{dx^\alpha}{dt} \quad (104)$$

kde je  $\gamma = 1/\sqrt{1-V^2}$  a  $V^2 = [V^r]^2 + [V^\theta]^2 + [V^\phi]^2$ . Odtud dostáváme, že je

$$p^t = m\gamma \frac{dt}{dt} = \gamma m = E, \quad (105)$$

a tedy

$$K_1 = p_t = -p^t = -E. \quad (106)$$

V případě druhé pohybové konstanty, zřejmě platí

$$p^\phi = \gamma m \frac{d\phi}{dt} = \gamma m \frac{r^2}{r^2} \frac{d\phi}{dt} = \gamma \frac{L}{r^2}. \quad (107)$$

Pro  $V \ll 1$  je  $\gamma \approx 1$ . Dostáváme tak

$$K_2 = p_\phi = r^2 p^\phi = L. \quad (108)$$

**Příklad č.13** Ukažte, že pohyb v centrální rovině je stabilní vůči latitudinální perturbaci.

**Řešení:** Pohybová rovnice pro latitudinální souřadnici má tvar

$$\frac{dp^\theta}{d\tau} = \frac{2 \cos \theta}{r^4 \sin^3 \theta} L^2 - \frac{2}{r} p^r p^\theta. \quad (109)$$

Bez újmy na obecnosti předpokládáme, že pohyb se odehrává v rovině  $\theta = \pi/2$  a  $r = r_0 = \text{konst.}$  Vyvolejme poruchu  $\delta\theta$ . Řešení rovnice (109) hledejme ve tvaru  $\theta = \pi/2 + \delta\theta$ . Do prvního řádu v  $\delta\theta$  dostáváme rovnici

$$\ddot{\delta\theta} = -\frac{2L^2}{r^4} \delta\theta, \quad (110)$$

kde jsme využili následující vztahy

$$\cos(\pi/2 + \delta\theta) = \cos(\pi/2) - \sin(\pi/2)\delta\theta + \dots \approx -\delta\theta. \quad (111)$$

a

$$\sin(\pi/2 + \delta\theta) = \sin(\pi/2) + \cos(\pi/2)\delta\theta - \frac{1}{2} \sin(\pi/2)\delta\theta^2 + \dots \approx 1. \quad (112)$$

Řešením rovnice (110) jsou zřejmě harmonické kmity, tj.

$$\delta\theta \sim \sin \tau. \quad (113)$$

Odtud plyne stabilita pohybu v centrální rovině vůči latitudinální poruše (perturbaci).

**Příklad č.14** Pomocí Hamiltonovy-Jacobiho metody určete pohybové rovnice testovací částice ve Schwarzschildově poli.

**Řešení:** Hamilton-Jacobiho rovnice pro funkci  $S$  mají tvar

$$-\frac{\partial S}{\partial \lambda} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \frac{\partial S}{\partial x^\alpha} \frac{\partial S}{\partial x^\beta} \quad (114)$$

kde je

$$p_\alpha \equiv \frac{\partial S}{\partial x^\alpha}. \quad (115)$$

Srovnáním s normalizací 4-hybnosti  $-m^2 = g^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta$  získáme další vztah

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda} = \frac{1}{2} m^2. \quad (116)$$

Ve Schwarzschildově merickém poli bude mít H-J rovnice tvar

$$-\frac{\partial S}{\partial \lambda} = -\frac{1}{2} f(r)^{-1} \left( \frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 + \frac{f(r)}{2} \left( \frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left( \frac{\partial S}{\partial \phi} \right)^2. \quad (117)$$

Řešení hledejme v separovaném tvaru

$$S = S_\lambda + S_t + S_r + S_\theta + S_\phi. \quad (118)$$

V předchozích příkladech jsme určili dvě pohybové konstanty  $p_t = -E$  a  $p_\phi = L$ . Z rovnic (115) a (116) dostáváme

$$p_t = \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial S_t}{\partial t} \rightarrow S_t = -Et, \quad (119)$$

$$p_\phi = \frac{\partial S}{\partial \phi} = \frac{\partial S_\phi}{\partial \phi} \rightarrow S_\phi = L\phi, \quad (120)$$

$$\frac{1}{2} m^2 = \frac{\partial S}{\partial \lambda} = \frac{\partial S_\lambda}{\partial \lambda} \rightarrow S_\lambda = \frac{1}{2} m^2 \lambda. \quad (121)$$

Takže řešení (118) má nyní tvar

$$S = \frac{1}{2} m^2 \lambda - Et + L\phi + S_r + S_\theta. \quad (122)$$

Toto řešení dosadíme zpět do (117) a obdržíme

$$-\frac{1}{2} m^2 = -\frac{1}{2} f(r)^{-1} E^2 + \frac{1}{2} f(r) \left( \frac{\partial S_r}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2r^2} \left( \frac{\partial S_\theta}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{2r^2 \sin^2 \theta} L^2 \quad (123)$$

Po jednoduchých úpravách a separaci na část závislou na  $r$  a na část závislou na  $\theta$  obdržíme rovnici ve tvaru

$$\frac{r^2}{f(r)} E^2 - f(r) r^2 \left( \frac{\partial S_r}{\partial r} \right)^2 - m^2 r^2 = \left( \frac{\partial S_\theta}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{L^2}{\sin^2 \theta} = K = const. \quad (124)$$

Dosažením za  $p_r = \partial S_r / \partial r$  a  $p_\theta = \partial S_r / \partial \theta$  a po algebraických úpravách dostaneme ve rovnice

$$(p^r)^2 = E^2 - f(r) \left( m^2 + \frac{K}{r^2} \right), \quad (125)$$

$$(p^\theta)^2 = \frac{1}{r^4} \left( K - \frac{1}{\sin^2 \theta} L^2 \right). \quad (126)$$

Při pohybu v ekvatoriální rovině,  $\theta = \pi/2$ , z rovnice pro latitudinální složku 4-hybnosti dostaneme

$$0 = K - L^2. \quad (127)$$

Tento výsledek je motivací k zavedení nové pohybové konstanty  $Q = K - L^2$ , pro kterou v ekvatoriální rovině platí  $Q = 0$ . Pomocí této pohybové konstanty přejdou pohybové rovnice (125) a (126) na tvar

$$(p^r)^2 = E^2 - f(r) \left( m^2 + \frac{L^2 + Q}{r^2} \right), \quad (128)$$

$$(p^\theta)^2 = \frac{1}{r^4} \left( Q + L^2 - \frac{1}{\sin^2 \theta} L^2 \right). \quad (129)$$

Zbylé dvě rovnice pro časovou a azimutální souřadnici zřejmě jsou

$$p^t = -\frac{p_t}{f(r)} = \frac{E}{f(r)}, \quad (130)$$

$$p^\phi = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} p_\phi = \frac{L}{r^2 \sin^2 \theta}. \quad (131)$$

**Příklad č.15** Uvažujme testovací částici, která radiálně padá z  $r = R$  v poli Schwarzschildovy černé díry. Určete interval vlastního času  $\Delta\tau$  za který dorazí testovací částice do singularity ( $r=0$ ) a interval souřadnicového času  $\Delta t$  který je potřeba k dosažení horizontu ( $r=2$ ). Prostorčasový interval má ve Schwarzschildových souřadnicích tvar

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (132)$$

kde je  $f(r) = 1 - 2/r$ .

**Řešení:** Radiálně padající částice má následující složky 4-rychlosti

$$U = (u^t, U^r, 0, 0). \quad (133)$$

4-rychlost splňuje normovací podmínku

$$-1 = g_{ij}U^iU^j \Rightarrow (U^r)^2 = E^2 - (1 - 2/r), \quad (134)$$

kde jsme využili existenci integrálu pohybu  $U_t = -E$ , který je interpretován jako kovariantní, specifická, energie měřená statickými pozorovateli v nekonečnu. Částice je uvolněna z klidu na  $r = R$ , to znamená, že odpovídající hodnota  $E^2$  bude

$$E^2 = 1 - 2/R. \quad (135)$$

Pro interval vlastního času tak dostáváme rovnici

$$\Delta\tau = - \int_R^0 \frac{dr}{\sqrt{2/r - 2/R}}, \quad (136)$$

kde znaménko "−" znamená, že částice padá směrem k černé díře. Integrál (136) řešíme následovně

$$\begin{aligned} \Delta\tau &= \sqrt{\frac{R}{2}} \int_R^0 \sqrt{\frac{r/R}{1 - r/R}} = |r/R = \cos^2 \eta, \quad dr = -2R \cos \eta \sin \eta d\eta| \\ &= \frac{2}{\sqrt{2}} R^{3/2} \int_0^{\pi/2} \cos^2 \eta d\eta = |\cos^2 \eta = (1 + \cos 2\eta)/2| \\ &= \frac{2}{\sqrt{2}} R^{3/2} \int_0^{\pi/2} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\eta \right) d\eta = \left( \frac{R}{2} \right)^{3/2} (\pi + 1/\sqrt{2}). \end{aligned} \quad (137)$$

Pro určení intervalu souřadnicového času  $\Delta t$  využijeme rovnici (134) a vztah  $U^t = g^{tt}U_t$ . Dostáváme tak rovnici

$$\frac{U^r}{U^t} = \frac{dr}{dt} = - \frac{(1 - 2/r)\sqrt{E^2 - (1 - 2/r)}}{E}. \quad (138)$$

Řešením této diferenciální rovnice je integrál

$$\begin{aligned} \Delta t &= - \int_R^2 \frac{E dr}{(1 - 2/r)\sqrt{E^2 - (1 - 2/r)}} \\ &= - \int_R^2 \frac{\sqrt{1 - 2/R} dr}{(1 - 2/r)\sqrt{2/r - 2/R}}. \end{aligned} \quad (139)$$

Analogicky jako v případě předchozího integrálu zavedeme substituci

$$r/R = \cos^2 \eta \quad (140)$$

a obdržíme integrál (139) ve tvaru

$$\begin{aligned} \Delta t &= \sqrt{\frac{2(1 - 2/R)}{R}} \int_0^{\eta_0} \frac{\cos^4 \eta}{\sin^2 \eta - 2/R} d\eta \\ &= \sqrt{\frac{2(1 - 2/R)}{R}} \times \\ &\quad \left[ \frac{(4 + R)\eta}{2R} + \frac{2\sqrt{2} \operatorname{arctanh} \left( \frac{\sqrt{2} \tan \eta}{\sqrt{R-2}} \right)}{R\sqrt{R-2}} + \frac{1}{2} \cos \eta \sin \eta \right]_0^{\eta_0 = \arccos \sqrt{2/R}} \end{aligned} \quad (141)$$

Dominující člen je  $\operatorname{arctanh}(x)$ , jehož argument je pro horní mez  $\eta_0 = \arccos \sqrt{2/R}$  roven  $x = 1$ , pro který funkce  $\operatorname{arctanh}$  diverguje. To znamená, že z pohledu souřadnicového času dosáhne testovací částice horizontu za nekonečně dlouhou dobu zatímco z pohledu vlastního času horizontu dosáhne singularity (a tedy i horizontu) po uběhnutí konečného intervalu vlastního času.

**Příklad č.16** Podmínky existence kruhových orbit a určení jejich stability z efektivního potenciálu  $V_{eff}(r; L)$ .

**Řešení:** Vyjděme z pohybové rovnice pro radiální složku 4-rychlosti testovací částice.

$$[u^r]^2 = E^2 - V_{eff}(r; L). \quad (142)$$

Derivací této rovnice podle afinního parametru  $\tau$  dostaneme diferenciální rovnici 2. řádu

$$\frac{du^r}{d\tau} = -\frac{1}{2} \frac{dV_{eff}}{dr}. \quad (143)$$

Na kruhové orbitě musí zřejmě platit  $u^r = 0$  a  $\frac{du^r}{d\tau} = 0$ . Dosazením druhé podmínky do (143) získáme první podmínku pro určení kruhové orbity ze znalosti průběhu efektivního potenciálu ve tvaru

$$\boxed{\frac{dV_{eff}}{dr} = 0.} \quad (144)$$

Pro určení podmínky stability kruhové orbity  $r_0$  aplikujeme poruchu  $\delta r$ . Řešení tak budeme hledat ve tvaru  $r = r_0 + \delta r$ . Dosaďme jej do rovnice (143) a počítejme. Dostáváme

$$\begin{aligned} \ddot{\delta r} &= -\frac{1}{2} \frac{dV_{eff}}{dr} = |\text{Taylorův rozvoj}| \\ &= -\frac{dV_{eff}}{dr}|_{r_0} - \frac{1}{2} \frac{d^2V_{eff}}{dr^2}|_{r_0} \delta r + \dots \\ &\approx -\frac{1}{2} \frac{d^2V_{eff}}{dr^2}|_{r_0} \delta. \end{aligned} \quad (145)$$

Je-li

$$-\frac{d^2V_{eff}}{dr^2}|_{r_0} < 0 \Rightarrow \frac{d^2V_{eff}}{dr^2}|_{r_0} > 0 \quad (\text{lokální minimum}) \quad (146)$$

obdržíme rovnici harmických kmitů což znamená, že porucha  $\delta$  je omezená a to implikuje **stabilitu** kruhové orbity. Je-li naopak

$$-\frac{d^2V_{eff}}{dr^2}|_{r_0} > 0 \Rightarrow \frac{d^2V_{eff}}{dr^2}|_{r_0} < 0 \quad (\text{lokální maximum}) \quad (147)$$

obdržíme rovnici jejímž řešením je porucha  $\delta$  která exponenciálně roste a to implikuje **nestabilitu** kruhové orbity.

### 3 Tenzor křivosti

**Příklad č.1** Určete složky Riemannova tenzoru, Ricciho tenzoru a Ricciho skaláru pro následující metriky:

1. 
$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\phi^2, \quad (148)$$

2. 
$$dl^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2. \quad (149)$$



**Řešení:** Složky Riemannova tenzoru určíme z výrazu

$$R^i{}_{jkl} \equiv \Gamma^1{}_{jl,k} - \Gamma^1{}_{jk,l} + \Gamma^s{}_{jl}\Gamma^i{}_{ks} - \Gamma^s{}_{jk}\Gamma^i{}_{ls}, \quad (150)$$

složky Ricciho tenzoru a Ricciho skaláru podle vztahů

$$R_{jl} = R^i{}_{jil}, \quad R = R^i{}_{i} = g^{ij} R_{ij}. \quad (151)$$

Přímým výpočtem se přesvědčíme, že je

$$1. \quad R^i{}_{jkl} = 0, \quad R_{ik} = 0 \quad \text{a} \quad R = 0 \quad \text{pro všechna } i, j, k, l, \quad (152)$$

2.

$$R^{\theta}{}_{\phi\theta\phi} = -R^{\phi}{}_{\phi\phi\theta} = \sin^2 \theta, \quad (153)$$

$$R^{\phi}{}_{\theta\theta\phi} = -R^{\theta}{}_{\theta\phi\theta} = -1 \quad (154)$$

a dále dostáváme

$$R_{\phi\phi} = R^i{}_{\phi i\phi} = R^{\theta}{}_{\phi\theta\phi} + R^{\phi}{}_{\phi\phi\phi} = \sin^2 \theta, \quad (155)$$

$$R_{\theta\theta} = R^i{}_{\theta i\theta} = R^{\theta}{}_{\theta\theta\theta} + R^{\phi}{}_{\theta\phi\theta} = 1, \quad (156)$$

a

$$R = g^{lj} g_{lj} = g^{\phi\phi} R_{\phi\phi} = \frac{1}{\sin^2 \theta} \sin^2 \theta = 1. \quad (157)$$

**Příklad č.2** Určete složky slapového zrychlení působícího na radiálně padajícího pozorovatele v poli Schwarzschildovy černé díry.

**Řešení:** Vyjdeme z rovnice pro geodetickou deviaci ve tvaru

$$\frac{Dl^a}{D\tau^2} = R^a{}_{bcd} U^b l^c U^d, \quad (158)$$

kde je  $R$  Riemannův tenzor,  $U$  je 4-rychlost padajícího pozorovatele a  $l$  je tzv. separační vektor. Chceme najít slapové zrychlení  $\Delta^2 a = Dl/D\tau^2$  jaké bude pocítovat (měřit) nešťastný pozorovatel padající k černé díře. Transformujeme tedy rovnici (158) do ortonormálního systému spojeného s volně padajícím pozorovatelem, tj.

$$\frac{D^2 l^{\hat{a}}}{D\tau^2} = R^{\hat{a}}{}_{\hat{b}\hat{c}\hat{d}} U^{\hat{b}} l^{\hat{c}} U^{\hat{d}}. \quad (159)$$

V tomto systému má separační vektor složku  $l^{\hat{0}} = 0$  a ostatní nechť jsou  $l^{\hat{1}} = \delta x$ ,  $l^{\hat{2}} = \delta y$  a  $l^{\hat{3}} = \delta z$ . Složky 4-rychlosti jsou zřejmě  $U^{\hat{0}} = 1$  a ostatní jsou nulové. Transformaci přechodu od (158) k (159) provedeme ve dvou krocích. Nejprve přejdeme od souřadnicové baze k ortonormální bazi statického pozorovatele, tj.

$$\mathbf{e}_{\hat{t}} = (1 - 2/r)^{-1/2} \mathbf{e}_t, \quad (160)$$

$$\mathbf{e}_{\hat{r}} = (1 - 2/r)^{1/2} \mathbf{e}_r, \quad (161)$$

$$\mathbf{e}_{\hat{\theta}} = r^{-1} \mathbf{e}_{\theta}, \quad (162)$$

$$\mathbf{e}_{\hat{\phi}} = (r \sin \theta)^{-1} \mathbf{e}_{\phi}. \quad (163)$$

a následně přejdeme od této baze k ortonormální bazi volně padající relacemi

$$\mathbf{e}_{\hat{0}} = \mathbf{U} = \gamma \mathbf{e}_{\hat{t}} - \gamma v \mathbf{e}_{\hat{r}}, \quad (164)$$

$$\mathbf{e}_{\hat{1}} = -\gamma v \mathbf{e}_{\hat{t}} + \gamma \mathbf{e}_{\hat{r}}, \quad (165)$$

$$\mathbf{e}_{\hat{2}} = \mathbf{e}_{\hat{\theta}}, \quad (166)$$

$$\mathbf{e}_{\hat{3}} = \mathbf{e}_{\hat{\phi}}. \quad (167)$$

Složky Riemannova tenzoru křivosti určíme stejným způsobem jako v předchozím příkladu a v souřadnicové bazi obdržíme tyto nenulové složky

$$R^t{}_{rtr} = -R^t{}_{rrt} = 2R^\theta{}_{rr\theta} = -2R^\theta{}_{r\theta r} = 2R^\phi{}_{rr\phi} = -2R^\phi{}_{r\phi r} = \frac{2}{r^2(r-2)} \quad (168)$$

$$R^t{}_{\theta t\theta} = -R^t{}_{\theta\theta t} = R^r{}_{\theta r\theta} = -R^r{}_{\theta\theta r} = 2R^\phi{}_{\theta\theta\phi} = -2R^\phi{}_{\theta\phi\theta} = -\frac{1}{r}, \quad (169)$$

$$R^t{}_{\phi t\phi} = -R^t{}_{\phi\phi t} = R^r{}_{\phi r\phi} = -R^r{}_{\phi\phi r} = -\frac{1}{2}R^\theta{}_{\phi\theta\phi} = \frac{1}{2}R^\theta{}_{\phi\phi\theta} = -\frac{\sin^2\theta}{r} \quad (170)$$

$$R^r{}_{ttr} = -R^r{}_{trt} = -2R^\theta{}_{tt\theta} = 2R^\theta{}_{t\theta t} = -2R^\phi{}_{tt\phi} = 2R^\phi{}_{t\phi t} = \frac{2(r-2)}{r^4}. \quad (171)$$

Složky tenzoru křivosti vůči ortonormální, statické bazi získáme z transformační relace

$$R^{\hat{a}}{}_{\hat{b}\hat{c}\hat{d}} = \Lambda^{\hat{a}}{}_{\hat{a}} \Lambda_{\hat{b}}{}^b \Lambda_{\hat{c}}{}^c \Lambda_{\hat{d}}{}^d R^a{}_{bcd}. \quad (172)$$

Výsledkem jsou tyto složky tenzoru křivosti

$$R^{\hat{t}}{}_{\hat{r}\hat{t}\hat{r}} = -R^{\hat{t}}{}_{\hat{r}\hat{r}\hat{t}} = 2R^{\hat{\theta}}{}_{\hat{r}\hat{r}\hat{\theta}} = -2R^{\hat{\theta}}{}_{\hat{r}\hat{\theta}\hat{r}} = 2R^{\hat{\phi}}{}_{\hat{r}\hat{r}\hat{\phi}} = -2R^{\hat{\phi}}{}_{\hat{r}\hat{\phi}\hat{r}} = \frac{2}{r^3}, \quad (173)$$

$$R^{\hat{t}}{}_{\hat{\theta}\hat{t}\hat{\theta}} = -R^{\hat{t}}{}_{\hat{\theta}\hat{\theta}\hat{t}} = R^{\hat{r}}{}_{\hat{\theta}\hat{r}\hat{\theta}} = -R^{\hat{r}}{}_{\hat{\theta}\hat{\theta}\hat{r}} = 2R^{\hat{\phi}}{}_{\hat{\theta}\hat{\theta}\hat{\phi}} = -2R^{\hat{\phi}}{}_{\hat{\theta}\hat{\phi}\hat{\theta}} = -\frac{1}{r^3}, \quad (174)$$

$$R^{\hat{t}}{}_{\hat{\phi}\hat{t}\hat{\phi}} = -R^{\hat{t}}{}_{\hat{\phi}\hat{\phi}\hat{t}} = R^{\hat{r}}{}_{\hat{\phi}\hat{r}\hat{\phi}} = -R^{\hat{r}}{}_{\hat{\phi}\hat{\phi}\hat{r}} = -\frac{1}{2}R^{\hat{\theta}}{}_{\hat{\phi}\hat{\theta}\hat{\phi}} = \frac{1}{2}R^{\hat{\theta}}{}_{\hat{\phi}\hat{\phi}\hat{\theta}} = -\frac{1}{r^3}, \quad (175)$$

$$R^{\hat{r}}{}_{\hat{t}\hat{t}\hat{r}} = -R^{\hat{r}}{}_{\hat{t}\hat{r}\hat{t}} = -2R^{\hat{\theta}}{}_{\hat{t}\hat{t}\hat{\theta}} = 2R^{\hat{\theta}}{}_{\hat{t}\hat{\theta}\hat{t}} = -2R^{\hat{\phi}}{}_{\hat{t}\hat{t}\hat{\phi}} = 2R^{\hat{\phi}}{}_{\hat{t}\hat{\phi}\hat{t}} = \frac{2}{r^3}. \quad (176)$$

Nakonec, transformací  $(\hat{t}, \hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi}) \rightarrow (\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3})$  dostaneme tyto hledané složky tenzoru křivosti měřené z volně padajícího systému

$$R^{\hat{0}}{}_{\hat{1}\hat{0}\hat{1}} = -R^{\hat{0}}{}_{\hat{1}\hat{1}\hat{0}} = -R^{\hat{1}}{}_{\hat{0}\hat{0}\hat{1}} = R^{\hat{1}}{}_{\hat{0}\hat{1}\hat{0}} = \frac{2}{r^3}, \dots$$

Výsledné složky přílovového z rychlení z pohledu volně padajícího pozorovatele jsou zřejmě

$$\frac{D^2 l^{\hat{1}}}{D\tau^2} = -\frac{2(1-v^2)\gamma^2 \delta x}{r^3}, \quad (177)$$

$$\frac{D^2 l^{\hat{2}}}{D\tau^2} = \frac{(1-v^2)\gamma^2 \delta y}{r^3}, \quad (178)$$

$$\frac{D^2 l^{\hat{3}}}{D\tau^2} = \frac{(1-v^2)\gamma^2 \delta z}{r^3}. \quad (179)$$

## 4 Kosmologie

**Příklad č.1** Najděte transformaci, která převede R-W metriku

$$ds^2 = -dt^2 + R^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right], \quad (180)$$

na tvar

$$ds^2 = -dt^2 + R^2(t) [d\chi^2 + \Sigma_k^2(\chi)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)]. \quad (181)$$

kde je

$$\Sigma_k(\chi) = \begin{cases} \chi & \text{pro } k = 0, \\ \sin \chi & \text{pro } k = +1, \\ \sinh \chi & \text{pro } k = -1. \end{cases} \quad (182)$$

**Řešení:** Příslušná transformace je zřejmě

$$r = \Sigma_k(\chi). \quad (183)$$

Pro  $k = 0$  dostaneme  $dr = d\chi$  a tedy

$$ds^2 = -dt^2 + R^2(t) [d\chi^2 + \chi^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)]. \quad (184)$$

Pro  $k = +1$  bude diferenciál  $dr = \cos \chi d\chi$ , který vede k výsledku (užitím vztahu  $\sin^2 \chi + \cos^2 \chi = 1$ )

$$ds^2 = -dt^2 + R^2(t) [d\chi^2 + \sin^2 \chi^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)]. \quad (185)$$

Pro  $k = -1$  snadno určíme  $dr = \cosh \chi d\chi$ , který vede k výsledku (užitím vztahu  $\cosh \chi - \sinh \chi = 1$ )

$$ds^2 = -dt^2 + R^2(t) [d\chi^2 + \sinh^2 \chi^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)]. \quad (186)$$

**Příklad č.2** Odvoďte vztah pro kosmologický rudý posuv

$$1 + z = \frac{R(t_0)}{R(t)}. \quad (187)$$

**Řešení:** Galaxie  $G_1$  má radiální souputující souřadnici  $\chi$ . Nechť se vyzářený foton pohybuje podél souřadnice  $\chi$ . Z rovnice  $ds^2 = 0$  dostáváme

$$0 = -dt^2 + R^2(t)d\chi \Rightarrow \chi = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{R(t)}. \quad (188)$$

Po uplynutí periody  $\Delta t_1$  je vyslán další foton, který dorazí k pozorovateli v čase  $t_2 + \Delta t_2$ . Dostáváme tak rovnici

$$\chi = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{R(t)} = \int_{t_1 + \Delta t_1}^{t_2 + \Delta t_2} \frac{dt}{R(t)} \quad (189)$$

což lze napsat ve tvaru

$$\int_{t_1}^{t_1+\Delta t_1} \frac{dt}{R(t)} + \int_{t_1+\Delta t_1}^{t_2} \frac{dt}{R(t)} = \int_{t_1+\Delta t_1}^{t_2} \frac{dt}{R(t)} + \int_{t_2}^{t_2+\Delta t_2} \frac{dt}{R(t)} \quad (190)$$

a obdržíme tak rovnici

$$\int_{t_2}^{t_2+\Delta t_2} \frac{dt}{R(t)} = \int_{t_1}^{t_1+\Delta t_1} \frac{dt}{R(t)}. \quad (191)$$

Během period  $\Delta t_i$  se škálový parametr příliš nemění, klademe tedy

$$R(t_1) \simeq R(t_1 + \Delta t_1) \quad \text{a} \quad R(t_2) \simeq R(t_2 + \Delta t_2). \quad (192)$$

Po úpravách obdržíme výsledek

$$\frac{R(t_2)}{R(t_1)} = \frac{\Delta t_2}{\Delta t_1} = \frac{f_1}{f_2}. \quad (193)$$

Rudý posuv  $z$  je definován vztahem

$$1 + z = f_{zdr}/f_{poz}. \quad (194)$$

V našem případě index 1 odpovídá zdroji a index 2 odpovídá pozorovateli. Výsledek tedy je

$$\frac{R(t_2)}{R(t_1)} = 1 + z. \quad (195)$$

**Příklad č.3** Určete parametry Einsteinova statického vesmíru a ukažte, že tento model vesmíru je nestabilní.

**Řešení:** Vyděme z Friedmanových rovnic (FR), které mají tvar

$$3 \frac{\dot{R}^2 + k}{R^2} - \Lambda = 8\pi\rho \quad (196)$$

$$\frac{2R\ddot{R} + \dot{R}^2 + k}{R^2} - \Lambda = -8\pi p. \quad (197)$$

Z první FR dostaneme rovnici

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi}{3}\rho R^2 + \frac{\Lambda}{3}R^2 - k. \quad (198)$$

Dosazením této rovnice do 2. FR za  $\dot{R}^2$  obdržíme vztah

$$2R\ddot{R} = -8\pi p R^2 - \frac{8\pi}{3}\rho R^2 + \frac{2}{3}\Lambda R^2. \quad (199)$$

Statičnost vesmíru vyžaduje splnění podmínky  $\dot{R} = \ddot{R} = 0$ . Pokud má statický model poposovat současný Vesmír, tak látka, kterou je vyplněn představuje nekoherentní prach, jehož stavová rovnice je jednoduše  $p = 0$ . Za těchto podmínek obdržíme z rovnic (198) a (199) výsledek

$$k = \Lambda R^2 \quad \text{a} \quad \rho = \rho_E = \frac{\Lambda}{4\pi}. \quad (200)$$

Protože je  $\Lambda > 0$  pak geometrie statického vesmíru bude mít kladnou křivost, resp.  $k = 1$ . Poloměr Einsteinova statického vesmíru pak je

$$R_E = \frac{1}{\sqrt{\Lambda}}. \quad (201)$$

Nyní je potřeba zjistit, zda je tento model stabilní vůči perturbacím hustoty-energie a potažmo škálového parametru. Definujme funkce

$$R(t) = \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} + \delta R(t) \quad \text{a} \quad \rho(t) = \frac{\Lambda}{4\pi} + \delta\rho(t) \quad (202)$$

a dosadíme je do (199) a řešíme do prvního řádu v  $\delta R$ . Dostáváme rovnici

$$2\delta\ddot{R}\sqrt{\Lambda} \simeq -\frac{8\pi}{3}\delta\rho. \quad (203)$$

Vztah mezi  $\delta\rho$  a  $\delta R$  plyne z rovnice (pro nekoherentní prach)

$$d(\rho R^3) = 0 \Rightarrow \delta\rho = -3\frac{\rho_E}{R_E}\delta R = -3\frac{R^{3/2}}{4\pi}\delta R. \quad (204)$$

Výsledkem je rovnice

$$\delta\ddot{R} = \Lambda\delta R. \quad (205)$$

Protože je  $\Lambda > 0$  pak řešením této rovnice je

$$\delta R \sim \exp t \Rightarrow \text{nestabilita} . \quad (206)$$

**Příklad č.4** Odvoďte rovnici zachování energie popisující adiabatickou expanzi (kompresi) vesmíru.

**Řešení:** Hledaná rovnice plyne z nulovosti divergence tenzoru energie-hybnosti ideální tekutiny. Vycházíme z následujících vztahů

$$u_\mu \nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0, \quad (207)$$

$$T^{\mu\nu} = (p + \rho)u^\mu u^\nu + pg^{\mu\nu}. \quad (208)$$

Dosazením (208) do (207) obdržíme

$$\begin{aligned} u_\mu \nabla_\nu T^{\mu\nu} &= u_\mu \nabla_\nu [(\rho + p)u^\mu u^\nu + pg^{\mu\nu}] \\ &= u_\mu [\nabla_\nu (\rho + p)u^\mu u^\nu + (\rho + p)\nabla_\nu u^\mu u^\nu \\ &\quad + (\rho + p)u^\mu \nabla_\nu u^\nu + \nabla_\nu pg^{\mu\nu}] \end{aligned} \quad (209)$$

Dokažme nyní následující rovnost

$$u_\mu \nabla_\nu u^\mu = 0. \quad (210)$$

*Proof.* Zřejmě platí  $\nabla_\nu (u_\mu u^\mu) = 0$ . To nám dává

$$\begin{aligned} \nabla_\nu (u_\mu u^\mu) &= (\nabla_\nu u_\mu)u^\mu + u_\mu \nabla_\nu u^\mu = (\nabla_\nu u_\mu)u^\mu + u^\mu \nabla_\nu u_\mu \\ &= 2(\nabla_\nu u_\mu)u^\mu = 0 \end{aligned} \quad (211)$$

□

Z rovnice (209) pak dostáváme rovnici

$$\begin{aligned} 0 &= -\nabla_\nu(p + \rho)u^\nu - (\rho + p)\nabla_\nu u^\nu + u^\nu\nabla_\nu p \\ &= -u^\nu\nabla_\nu\rho - (\rho + p)\nabla_\nu u^\nu. \end{aligned} \quad (212)$$

Lze ukázat, že hustota počtu částic tvořících látku se zachovává, tj. platí

$$\nabla_\nu(nu^\nu) = 0 \quad (213)$$

což implikuje

$$\begin{aligned} \nabla_\nu(nu^\nu) = \nabla_\nu nu^\nu + n\nabla_\nu u^\nu \Rightarrow \nabla_\nu u^\nu &= -\frac{1}{n}u^\nu\nabla_\nu n \\ &= -\frac{1}{n}\frac{dn}{dt}. \end{aligned} \quad (214)$$

Dosazením (214) do (212) dostáváme rovnici

$$-\frac{d\rho}{dt} + \frac{p + \rho}{n}\frac{dn}{dt} = 0. \quad (215)$$

Hustota počtu částic je  $n = 1/V$  a tedy  $dn = -dV/V^2$ . Po dosazení do (215) máme

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{\rho + p}{V}\frac{dV}{dt}. \quad (216)$$

Po vynásobení této rovnice parametrem  $V$  (3-objem) obdržíme, po úpravách, rovnici

$$\frac{d(\rho V)}{dt} + p\frac{dV}{dt} = 0. \quad (217)$$

Spočítejme nyní 3-objem vesmíru  $V$ . Dostaneme

$$V = \int \sqrt{^3g}d\chi d\theta d\phi = \int R(t)^3 \Sigma_k(\chi)^2 \sin\theta d\chi d\theta d\phi = 4\pi R^3 \int \Sigma_k(\chi)^2 d\chi. \quad (218)$$

Po dosazení tohoto výsledku do rovnice (217) obdržíme konečný výsledek

$$\frac{d}{dt}(\rho R^3) + p\frac{dR^3}{dt} = 0. \quad (219)$$