

# Zadání zápočtové úlohy do kurzu Numerické metody I

Numericky řešte pohybové rovnice fotonu ve Schwarzcildově poli. Tyto rovnice mají tvar

$$\frac{dr}{d\lambda} = \sqrt{1 - (1 - 2/r) \frac{b^2}{r^2}}, \quad (1)$$

$$\frac{d\phi}{d\lambda} = \frac{b}{r^2}, \quad (2)$$

$$\frac{dt}{d\lambda} = (1 - 2/r)^{-1} \quad (3)$$

kde  $r$  je radiální,  $\phi$  je azimutální a  $t$  je časová souřadnice. Tuto soustavu řešte pro počáteční podmínku  $b = 10$ ,  $r_0 = 100$  a  $\phi_0 = 0$ . Určete jaké bude  $r = r_1$  pro  $\phi = \pi$ . Postupujte takto:

1. Zaveďte novou souřadnici  $u = 1/r$  a soustava diferenciálních rovnic přejde na tvar

$$\frac{dp}{d\lambda} = \frac{1}{2}u^3 \left( 4R + u \frac{dR}{du} \right), \quad (4)$$

$$\frac{du}{d\lambda} = p, \quad (5)$$

$$\frac{d\phi}{d\lambda} = bu^2, \quad (6)$$

$$\frac{dt}{d\lambda} = (1 - 2u)^{-1}. \quad (7)$$

kde je

$$R = 1 - (1 - 2u)b^2u^2 \text{ a } \frac{dR}{du} = -2b^2u(1 - 3u). \quad (8)$$

2. Pro numerickou integraci použijte RK45 metodu. A vytvořte tabulku

$\lambda$	$u$	$\phi$	$t$
-----------	-----	--------	-----

3. Použitím spline-interpolace a některou z metod hledání kořene transcendentních rovnic (Brentova metoda, metoda půlení intervalu, ...) najděte hodnotu  $u = u_1 = 1/r_1$  pro kterou bude  $\phi = \pi$  při výše uvedených počátečních podmínkách.